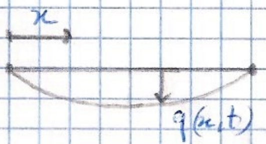
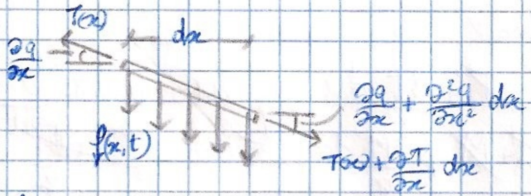
Sistemi Continui

Consideriamo un elemento dx di stringa tesa (sistema continuo monodimensionale presollecitato privo di rigidezza flessionale):





Imponiamo l'equilibrio dinamico $F=ma$ introducendo la massa per unità di lunghezza (densità lineare di massa $\mu(x)$):

$$\left(T(x)+\frac{\partial T}{\partial x}dx\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}dx\right)-T(x)\frac{\partial q}{\partial x}+f(x,t)\,dx=\mu(x)\,dx\,\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$$

Trascurando i termini di ordine superiore $\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\cdot dx^2\right)$:

$$T(x)\cdot\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}dx+\frac{\partial T}{\partial x}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}dx+\cancel{T(x)\frac{\partial q}{\partial x}}-\cancel{T(x)\frac{\partial q}{\partial x}}+f\,dx=\mu\,dx\,\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$$

Semplificando dx e notando che $T(x)\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+\frac{\partial T}{\partial x}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\cdot\frac{\partial q}{\partial x}\right]$:

$$\mu(x)\cdot\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\cdot\frac{\partial q(x,t)}{\partial x}\right]=f(x,t)$$

Per i sistemi a n g.d.l. avevamo $M\ddot{q}(t)+Kq(t)=f(t)$ e la dipendenza era solo del tempo. Qui c'è anche dipendenza dello spazio e l'equazione è alle derivate parziali. Può essere risolta solo in casi particolari, ad esempio per $T(x)=$ costante.

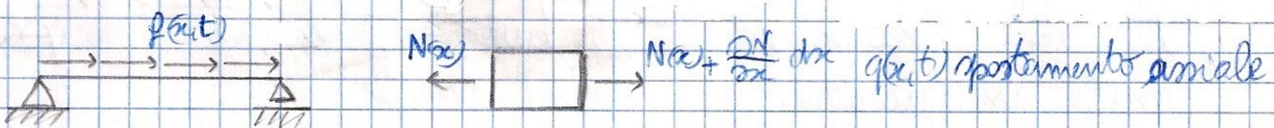
Introducendo l'operatore differenziale lineare $\mathcal{L}[q(x,t)]$ la formula generale delle equazioni del moto al continuo è:

$$\mu(x)\,\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2}+\mathcal{L}\left[q(x,t)\right]=f(x,t)$$

Al posto di $\mu(x)$ può essere inserito un generico M, operatore differenziale lineare (μ vale per i casi che analizziamo, che costituiscono situazioni particolari).

Ecco alcune particolarizzazioni di $\mathcal{L}[q(x,t)]$:

- vibrazioni assiali:



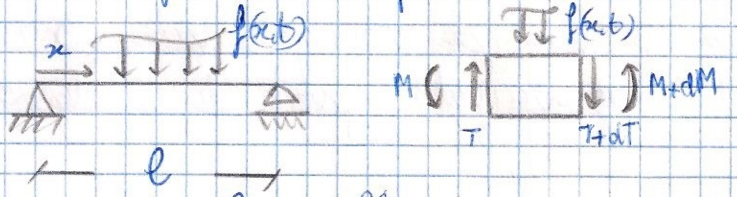
$$\Rightarrow \cancel{N(x)}+\frac{\partial N}{\partial x}dx-\cancel{N(x)}+f(x,t)\,dx=\mu(x)\,dx\,\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$$

Ricordando che $N=EA\varepsilon=EA\frac{\partial q}{\partial x}$ (eventualmente $A=A(x)$):

$$\mu(x)\,\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left[EA\,\frac{\partial q(x,t)}{\partial x}\right]=f(x,t)$$

Quindi in questo caso $\mathcal{L}\left[q(x,t)\right]=-\frac{\partial}{\partial x}\left[EA\,\frac{\partial q(x,t)}{\partial x}\right]$.

- vibrazione flessionale per trave Eulero-Bernoulli:



$$\begin{cases} dM = \frac{\partial M}{\partial x}\, dx \\ dT = \frac{\partial T}{\partial x}\, dx \end{cases}$$

Imponiamo gli equilibri:

$$\begin{cases} \cancel{-T} + \cancel{T} + \frac{\partial T}{\partial x} dx + f\, dx = \mu\, dx\, \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \\ \cancel{-M} + \cancel{M} + \frac{\partial M}{\partial x} dx - T\, dx + \cancel{f\, dx \frac{dx}{2}} = \cancel{I\, dx\, \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}} \end{cases}$$

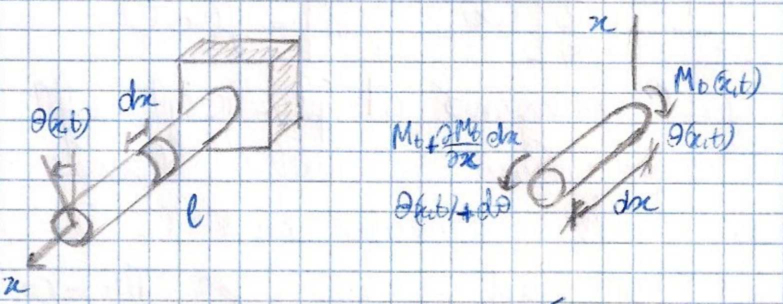
Trascuriamo l'inerzia rotatoria e ricordiamo che $M = EI\chi = EI\varphi' = -EI q''$:

$$\frac{\partial T}{\partial x} + f = \mu \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[-EI\, \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\right]$$

$$\Rightarrow \mu(x) \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\, \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2}\right] = f(x,t)$$

All'equazione differenziale vanno aggiunte le condizioni iniziali e quelle al contorno. La vecchia equazione statica della linea elastica ($EI\, v^{IV} = q$) diviene, in dinamica, $\mu \ddot{q} + EI\, q^{IV} = f$;

- vibrazioni torsionali:



$$M_t = G I_t \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \cancel{M_t(x,t)} + \frac{\partial M_t}{\partial x} dx - \cancel{M_t(x,t)} + m(x,t)\, dx = J_0\, dx\, \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow J_0 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[G J_t \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\right] = m(x,t)$$

Questa volta $\mathcal{L}[\theta(x,t)] = -\frac{\partial}{\partial x}\left[G J_t \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\right]$.

L'operatore di rigidezza $\mathcal{L}$ è analogo alla $\mathbb{K}$ del problema a n gdl. Date due funzioni u e v definite nel dominio $[0, l]$ si definisce prodotto scalare delle stesse:

$$(u, v) = \int_0^l u(x)\, v(x)\, dx$$

$\mathcal{L}$ gode della proprietà di auto-aggiuntezza (verificabile tramite integrazione per parti), ovvero:

$$(u, \mathcal{L}v) = (v, \mathcal{L}u)$$

Inoltre $(u, \mathcal{L}v) > 0$ (è definito positivo come $\mathbb{K}$ definito positivo $\forall\, \mathbf{u} \neq 0$, cioè $\mathbf{u}^T \mathbb{K}\, \mathbf{u} > 0$ $\forall\, u(x) \neq 0$, funzione non identicamente nulla su D).

Vibrazioni libere non smorzate

Sostituiamo nell'equazione del moto $q(x,t) = \varphi(x) \cdot g(t)$ per poter eseguire la separazione delle variabili:

$$\mu(x) \cdot \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2} + \mathcal{L}[q(x,t)] = 0 \Rightarrow \mu(x) \cdot \varphi(x) \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2} + \mathcal{L}[\varphi(x)] \cdot g(t) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = \frac{\mathcal{L}[\varphi(x)]}{\varphi(x) \cdot \mu(x)} = \text{costante} = \lambda$$

Il primo membro non dipende da x, il secondo da t, quindi entrambi non dipendono né da x né da t. Segue il problema agli autovalori λ con autofunzione $\varphi(x)$, con soluzione chiusa solo in casi particolari:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[\varphi(x)] = \lambda \mu(x) \cdot \varphi(x) & + \text{ c.c.} \\ \ddot{g}(t) + \lambda g(t) = 0 & + \text{ c.i.} \end{cases}$$

Vale la proprietà di ortogonalità delle autofunzioni, ovvero dati λ_r e λ_s, $\lambda_r \neq \lambda_s \Rightarrow \int_0^\ell \mu(x) \cdot \varphi_r(x) \cdot \varphi_s(x)\, dx = 0$. Infatti:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[\varphi_r(x)] = \lambda_r \mu(x) \cdot \varphi_r(x) \\ \mathcal{L}[\varphi_s(x)] = \lambda_s \mu(x) \cdot \varphi_s(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^\ell \varphi_s(x) \cdot \mathcal{L}[\varphi_r(x)]\, dx = \lambda_r \int_0^\ell \mu(x) \cdot \varphi_r(x) \varphi_s(x)\, dx \\ \int_0^\ell \varphi_r(x) \cdot \mathcal{L}[\varphi_s(x)]\, dx = \lambda_s \int_0^\ell \mu(x) \cdot \varphi_r(x) \cdot \varphi_s(x)\, dx \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro:

$$(\lambda_r - \lambda_s) \int_0^\ell \mu(x) \varphi_r(x) \varphi_s(x)\, dx = 0 \Rightarrow \int_0^\ell \mu(x) \varphi_r(x) \varphi_s(x)\, dx = 0$$

Se invece $r = s$ si ottiene la r-esima massa modale:

$$m_r := \int_0^\ell \mu(x) \varphi_r^2(x)\, dx$$

In definitiva, se $m_r = 1$ (autofunzioni ortonormali):

$$\int_0^\ell \mu(x) \cdot \varphi_r(x) \cdot \varphi_s(x)\, dx = \delta_{rs} \begin{cases} 0 & \text{se } r \neq s \\ 1 & \text{se } r = s \end{cases}$$

Attraverso il teorema di espansione è possibile giungere ad una rappresentazione della soluzione. La funzione $\varphi(x)$ che soddisfi condizioni al contorno e tale che $\mathcal{L}[\varphi(x)]$ sia continuo può essere rappresentata da una serie assolutamente e uniformemente convergente: $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ con $a_k = \int_0^\ell \mu(x) \varphi(x) \varphi_k(x)\, dx$

Recuperiamo quindi l'equazione $\ddot{g}(t) + \lambda g(t) = 0$ considerando l'autovalore $\lambda = \lambda_k > 0$, $\omega_k^2 := \lambda_k$. Risolviamo l'equazione differenziale:

$$\ddot{g}_k(t) + \lambda_k g_k(t) = 0 \Rightarrow g_k(t) = A_k \cos(\omega_k t) + B_k \operatorname{sen}(\omega_k t)$$

Essendo $q(x,t) = \varphi(x) \cdot g(t)$ e sommando rispetto a k:

$$q(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) [A_k \cos(\omega_k t) + B_k \operatorname{sen}(\omega_k t)]$$

Derivando:

$$\dot{q}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \cdot \omega_k [-A_k \operatorname{sen}(\omega_k t) + B_k \cos(\omega_k t)]$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

$$q(x,0)=q_0(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(x)\cdot A_k \qquad \dot q(x,0)=\dot q_0(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(x)\cdot\omega_k B_k$$

Moltiplicando per $\mu(x)\cdot\psi_\ell(x)$ e integrando sul dominio:

$$\int_0^\ell \mu(x)\cdot\psi_\ell(x)\cdot q_0(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\int_0^\ell \mu(x)\cdot\psi_\ell(x)\cdot\psi_k(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cdot\delta_{\ell k}$$

$$\int_0^\ell \mu(x)\cdot\psi_\ell(x)\cdot\dot q_0(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\omega_k\int_0^\ell \mu(x)\cdot\psi_\ell(x)\cdot\psi_k(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\omega_k\delta_{\ell k}$$

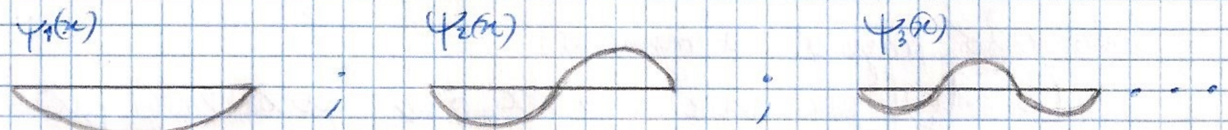
Abbiamo sfruttato l'ortogonalità e supposto modi ortonormali, $m_\ell=1$. Seguono:

$$A_\ell=\int_0^\ell \mu(x)\cdot\psi_\ell(x)q_0(x)\,dx \qquad B_\ell=\frac{1}{\omega_\ell}\int_0^\ell \mu(x)\psi_\ell(x)\dot q_0(x)\,dx$$

Possiamo evidenziare il significato fisico delle vibrazioni libere non smorzate ponendo $q_0(x)=\psi_j(x)$ e $\dot q_0(x)=0$:

$$A_\ell=\delta_{\ell j},\ B_\ell=0\ \forall\ell \Rightarrow q(x,t)=\psi_j(x)\cdot\cos(\omega_j t)\quad(\ell=j)$$

Solo per $\ell=j$ la soluzione non è nulla. Se la struttura è deformata secondo il j-esimo modo di vibrazione tutti i suoi punti vibrano indefinitamente di moto armonico con pulsazione ω_j conservando la forma iniziale $\psi_j(x)$:



$\omega_1=\sqrt{\lambda_1},\ \nu_1=\frac{\omega_1}{2\pi}$ $\qquad$ $\omega_2=\sqrt{\lambda_2},\ \nu_2=\frac{\omega_2}{2\pi}$ $\qquad$ $\omega_3=\sqrt{\lambda_3},\ \nu_3=\frac{\omega_3}{2\pi}$

Per la stringa tesa prismatica il problema consiste nelle equazioni seguenti ($\lambda=\omega^2$):

$$\mathcal{L}[\psi(x)]=\lambda\mu(x)\cdot\psi(x),\quad \mathcal{L}=-\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)\right],\quad T(x)=T,\ \mu(x)=\mu$$

$$\Rightarrow -T\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)=\omega^2\mu\psi(x)\Rightarrow \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{\omega^2\mu}{T}\psi(x)=0$$

Dall'imposizione delle condizioni al contorno e dalla risoluzione del problema agli autovalori si ottiene $A_k=\sqrt{\frac{2}{\mu\ell}}\Rightarrow\psi_k(x)=\sqrt{\frac{2}{\mu\ell}}\,\mathrm{sen}\left(k\pi\frac{x}{\ell}\right)$.

Per la trave inflessa prismatica di Eulero-Bernoulli il problema è invece al quarto ordine. Posto $\gamma^4=\frac{\mu\omega^2}{EI}$:

$$\mathcal{L}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x)\right],\quad EI(x)=EI,\ \mu(x)=\mu\Rightarrow\frac{d^4\psi(x)}{dx^4}\ \frac{\mu\omega^2}{EI}\psi(x)=0$$

$$\Rightarrow\psi(x)=A\,\mathrm{sen}(\gamma x)+B\cos(\gamma x)+C\,\mathrm{senh}(\gamma x)+D\cosh(\gamma x)$$

Per incastro-appoggio le costanti si ottengono ponendo $\psi(0)=0$, $\psi'(0)=0$, $\psi(\ell)=0$ e $EI\psi''(\ell)=0$. Per semplice appoggio si pongono $\psi(0)=0$, $EI\psi''(0)=0$, $\psi(\ell)=0$ e $EI\psi''(\ell)=0$. In questo caso la soluzione conduce alle stesse forme modali della stringa, ma A_k rimane arbitrario: $\psi_k=A_k\,\mathrm{sen}\left(k\pi\frac{x}{\ell}\right)$.

Vibrazioni forzate non smorzate

Le vibrazioni forzate non smorzate sono descritte dall'equazione seguente (a cui vanno aggiunte condizioni iniziali e al contorno):

$$\mu(x)\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2} + \mathcal{L}[q(x,t)] = f(x,t)$$

Attraverso il teorema di espansione otteniamo la trasformazione principale $q(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t)\cdot\varphi_k(x)$. Essa soddisfa automaticamente le condizioni al contorno. Sostituiamo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(x)\cdot\varphi_k(x)\,\ddot{p}_k(t) + \mathcal{L}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\,p_k(x)\right] = f(x,t)$$

Anche per questo tipo di vibrazioni moltiplichiamo per $\varphi_j(x)$, integriamo sul volume e sfruttiamo l'ortogonalità:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^l \mu(x)\cdot\varphi_k(x)\cdot\varphi_j(x)\,dx\cdot\ddot{p}_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^l \mathcal{L}[\varphi_k(x)]\,\varphi_j(x)\,dx\,p_k(t) = \int_0^l f(x,t)\,\varphi_j(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^l \mu(x)\cdot\varphi_j^2(x)\,dx\cdot\ddot{p}_j(t) + \omega_j^2\int_0^l \mu(x)\,\varphi_j^2(x)\,dx\;p_j(t) = \int_0^l f(x,t)\,\varphi_j(x)\,dx$$

Infatti $\mathcal{L}[\varphi_k(x)] = \omega_k^2\,\mu(x)\cdot\varphi_k(x)$ e le sommatorie danno termini diversi da zero solo se $k=j$. Si riconduce il sistema a ∞ g.d.l. a ∞ sistemi a un g.d.l. Con modi ortonormali ($m_j = 1$) e ponendo $F_j(t) = \int_0^l f(x,t)\,\varphi_j(x)\,dx$ (proiezione di $f(x,t)$ su $\varphi_j(x)$):

$$\ddot{p}_j(t) + \omega_j^2\,p_j(t) = F_j(t) \quad j = 1,2,\dots$$

Per quanto riguarda le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} q(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\cdot p_k(0) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\cdot p_{k0} = q_0(x) \\ \dot{q}(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\,\dot{p}_k(0) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\,\dot{p}_{k0} = \dot{q}_0(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^l \varphi_j(x)\cdot\varphi_k(x)\,\mu(x)\,p_{k0}\,dx = \int_0^l q_0(x)\,\mu(x)\cdot\varphi_j(x)\,dx \\ \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^l \varphi_j(x)\,\varphi_k(x)\,\mu(x)\,\dot{p}_{k0}\,dx = \int_0^l \dot{q}_0(x)\,\mu(x)\cdot\varphi_j(x)\,dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_{j0} = \int_0^l \mu(x)\,\varphi_j(x)\,q_0(x)\,dx \\ \dot{p}_{j0} = \int_0^l \mu(x)\,\varphi_j(x)\,\dot{q}_0(x)\,dx \end{cases}$$

Sempre con ipotesi di ortonormalità.

Vibrazioni forzate smorzate

Lo smorzamento nei sistemi continui è un'incognita di difficile determinazione e di difficile inserimento nelle equazioni. Il modo più semplice è introdurlo direttamente nell'equazione del moto e nella discretizzazione ipotizzando che le equazioni discrete rimangano disaccoppiate:

$$\mu(x)\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2} + \mathcal{C}[\dot{q}(x,t)] + \mathcal{L}[q(x,t)] = f(x,t)$$

Mentre $\mathcal{L}$ è l'operatore differenziale di rigidezza (su x),

$\mathcal{C}$ è operatore differenziale di smorzamento (su t, x e t, ecc).
Nelle equazioni discrete si può aggiungere il gruppo di termini normalmente legato allo smorzamento:

$$\ddot{p}_j(t) + 2\xi_j \omega_j \dot{p}_j(t) + \omega_j^2 p_j(t) = f_j(t) \quad j=1,\dots,\infty$$

Con $f_j(t) = \int_0^l \phi_j(x) f(x,t)\,dx$. Sia nel dominio del tempo che in quello della frequenza si otterranno quindi gli stessi risultati visti per i sistemi discreti.
Nei sistemi continui si può tuttavia scindere il termine di smorzamento in una parte esterna (dovuta al mezzo in cui si muove la struttura) e una interna (di Kelvin-Voigt dovuta al materiale visco-elastico):

$$\mu \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2} + c\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[I \frac{\partial^3 q(x,t)}{\partial x^2 \partial t}\right] + \mathcal{L}[q(x,t)] = f(x,t)$$

La proprietà fisica delle autofunzioni è preservata; è infatti possibile verificare che lo smorzamento, come al discreto, è proporzionale alla massa.
Lo smorzamento esterno $c\frac{\partial q(x,t)}{\partial t}$ influenza la soluzione solo dal punto di vista temporale. Lo smorzamento visco-elastico coinvolge anche le condizioni al contorno e, escluso il caso di trave prismatica, anche $\phi(x)$.